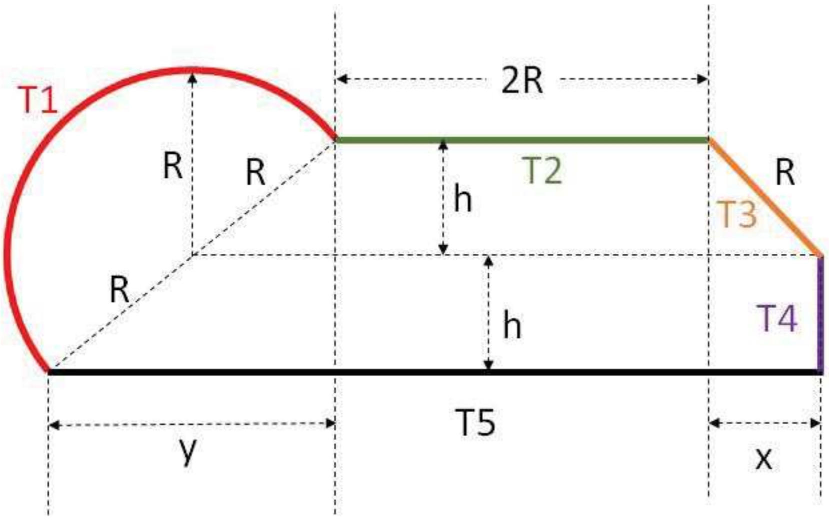
Questão 01

Resposta: **5570**

Para facilitar a compreensão, vamos denominar os trechos: T1, T2, T3, T4 e T5 (conforme ilustrado na figura abaixo), e seus valores correspondem ao comprimento do trecho.



$$T1 = \pi R$$

$$T2 = 2R$$

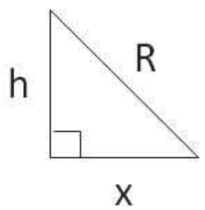
$$T3 = R$$

$$T4 = h$$

$$T5 = x + 2R + y$$

Sabe-se que:

- $h = 0{,}6R$.
- Calculando x em função de R.



$$R^2 = h^2 + x^2$$

$$x^2 = R^2 - h^2$$

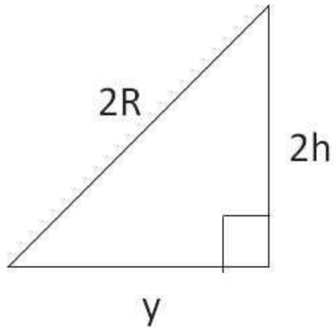
$$x^2 = R^2 - (0{,}6R)^2$$

$$x^2 = R^2 - 0{,}36R^2$$

$$x^2 = 0{,}64R^2$$

$$x = 0{,}8R$$

- Calculando y em função de R.



$$(2R)^2 = (2h)^2 + y^2$$
$$y^2 = (2R)^2 - (2h)^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4h^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4(0{,}6R)^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4(0{,}36R^2)$$
$$y^2 = 4R^2 - 1{,}44R^2$$
$$y^2 = 2{,}56R^2$$
$$y = 1{,}6R$$

Logo, o comprimento da pista (c) será:

$$c = T1 + T2 + T3 + T4 + T5$$
$$c = \pi R + 2R + R + h + (x + 2R + y)$$
$$c = \pi R + 2R + R + 0{,}6R + (0{,}8R + 2R + 1{,}6R)$$
$$c = \pi R + 2R + R + 0{,}6R + 4{,}4R$$
$$c = \pi R + 8R$$
$$c = (\pi + 8)R$$

Como o atleta dá 5 voltas, a distância percorrida (d) será:

$$d = 5c$$
$$d = 5(\pi + 8)R$$

Fazendo: $\pi \cong 3{,}14$ e $R = 100m$, temos:

$$d = 5(3{,}14 + 8)100$$
$$d = 5(11{,}14)100$$
$$d = 5570\ m$$

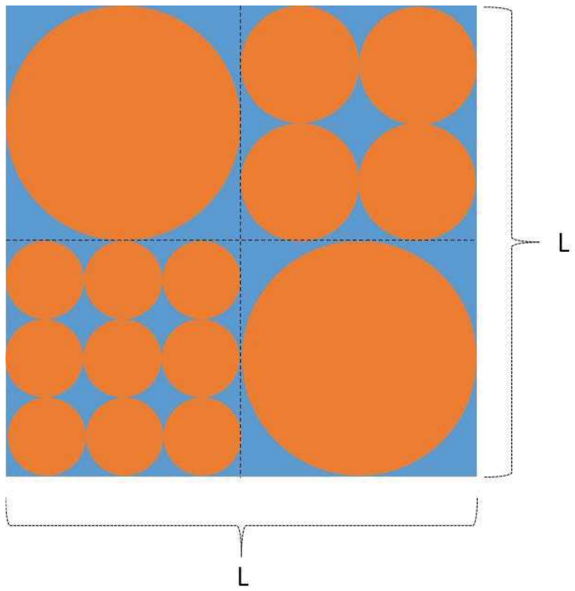
Questão 02

Letra: **CANCELADA**

Questão 03

Letra: **B**

Vejamos a figura:



Área total: $A = L^2$.

Área Laranja: Composta pela área de 2 círculos grande de raio $R_G = \frac{L}{4}$, 4 círculos médios de raio $R_M = \frac{L}{8}$ e 9 círculos pequenos de $R_P = \frac{L}{12}$.

$$A_{laranja} = 2 \times (\pi R_G^2) + 4 \times (\pi R_M^2) + 9 \times (\pi R_P^2)$$

$$A_{laranja} = 2 \times \left[\pi \left(\frac{L}{4}\right)^2\right] + 4 \times \left[\pi \left(\frac{L}{8}\right)^2\right] + 9 \times \left[\pi \left(\frac{L}{12}\right)^2\right]$$

$$A_{laranja} = \frac{2\pi L^2}{16} + \frac{4\pi L^2}{64} + \frac{9\pi L^2}{144}$$

$$A_{laranja} = \frac{\pi L^2}{8} + \frac{\pi L^2}{16} + \frac{\pi L^2}{16}$$

$$A_{laranja} = \pi L^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$A_{laranja} = \frac{\pi L^2}{4}$$

Área Azul: Diferença entre a área total e a área laranja.

$$A_{azul} = A - A_{laranja}$$

$$A_{azul} = L^2 - \frac{\pi L^2}{4}$$

$$A_{azul} = L^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A_{azul} = L^2\left(\frac{4 - \pi}{4}\right)$$

$$A_{azul} = \frac{L^2(4 - \pi)}{4}$$

Calculando a razão pedida:

$$\frac{A_{laranja}}{A_{azul}} = \frac{\frac{\pi L^2}{4}}{L^2\left(\frac{4 - \pi}{4}\right)} = \frac{\pi L^2}{4} \times \frac{4}{L^2(4 - \pi)} = \frac{\pi}{4 - \pi}$$

Questão 04

Letra: **D**

Analisando a situação dos carros:

- O primeiro automóvel passa pela origem a cada dez minutos; assim após dar m voltas, ele passará pela origem $10m$ minutos após sua partida.

- O segundo automóvel passa pela origem a cada doze minutos; assim após dar n voltas, ele passará pela origem $(12n + 2)$ minutos após a partida do primeiro automóvel.

- O terceiro automóvel passa pela origem a cada dezesseis minutos; assim após dar p voltas, ele passará pela origem $(16p + 4)$ minutos após a partida do primeiro automóvel.

Para que o primeiro e o terceiro automóvel passem juntos pela origem é necessário:

$$10m = 16p + 4$$

Resolução numérica:

Número de Voltas	**Automóvel 1** $\boldsymbol{Tempo = 10m}$	**Automóvel 3** $\boldsymbol{Tempo = 16p + 4}$
1	10	**20**
2	**20**	36
3	30	52
4	40	68
5	50	84
6	60	**100**
7	70	116
8	80	132
9	90	148
10	**100**	164

O segundo encontro na origem entre o automóvel 1 e o automóvel 3 dar-se-á em 100 minutos, ou seja, pela tabela acima vemos que para este segundo encontro ocorrer (números em vermelho):

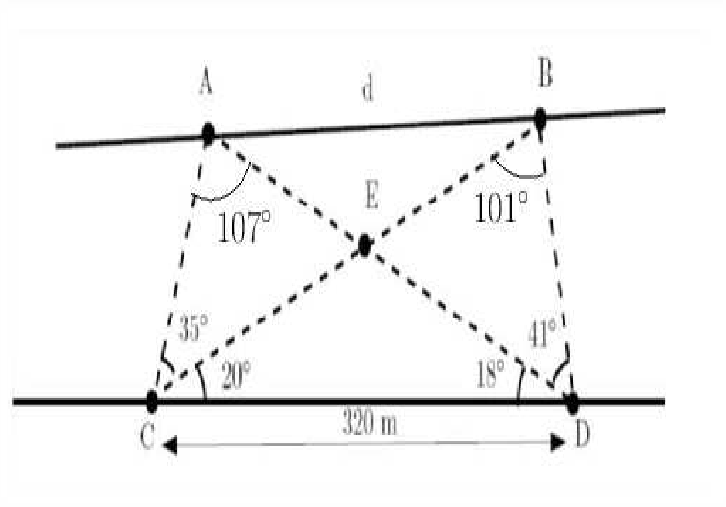
- Automóvel 1: Décima volta (tempo de 10 voltas: $10 \times 10 = 100\ minutos$)
- Automóvel 2: Sexta volta (tempo de 6 voltas: $16 \times 6 + 4 = 100\ minutos$)

Questão 5

Resposta: 204

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema.



Aplicando a *lei dos senos* ao triângulo ΔBCD, temos que:

$$\frac{\bar{BC}}{\text{sen}(59°)} = \frac{320}{\text{sen}(101°)} \Rightarrow \bar{BC} = 320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)}$$

Aplicando a *lei dos senos* ao triângulo ΔACD, temos que:

$$\frac{\bar{AC}}{\text{sen}(18°)} = \frac{320}{\text{sen}(107°)} \Rightarrow \bar{AC} = 320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)}$$

Aplicando a *lei dos cossenos* ao triângulo ΔABC, nós temos que:

$$\begin{aligned}
d^2 &= (\bar{BC})^2 + (\bar{AC})^2 - 2\bar{AC} \cdot \bar{BC} \cdot \cos(35°) \\
d^2 &= \left(320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)}\right)^2 + \left(320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)}\right)^2 - 2 \cdot 320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)} \cdot 320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)} \cdot \cos(35°) \\
d^2 &= 41435.127 \\
\Rightarrow d &= \sqrt{41435.127} \\
\Rightarrow d &= 203.55 \Rightarrow d \approx 204
\end{aligned}$$

Questão 06

Letra: **A**

A primeira condição imposta no problema é a função ter duas raízes (zeros da função). Para isto é necessário:

$$\Delta > 0$$
$$4 - 4a^2 > 0$$
$$-1 < a < 1 \quad \textbf{Condição (I)}$$

Por outro lado, -2 não deve ser um zero e, portanto:

$$f(-2) = 5a - 4 \neq 0$$
$$a \neq \frac{4}{5} \quad \textbf{Condição (II)}$$

Consideremos as duas possibilidades para os valores de a, de acordo com as condições **(I)** e **(II)**, vamos analisar cada

- Se $-1 < a < 0$.

  Neste caso, a parábola tem concavidade para baixo e devemos ter $f(-2) > 0$, o que implica que $a > 4/5$. O que não é possível, pois a hipótese inicial era o valor de a negativo.

- Se $0 < a < 1$

  Neste caso, a parábola tem concavidade para cima e devemos ter $f(-2) < 0$, o que implica que $a < 4/5$.

  Portanto, devemos ter $0 < a < \frac{4}{5}$, ou seja, $0 < a < 0{,}8$.

Questão 7

Resposta: Letra D

Solução:

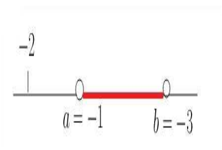
Vamos analisar cada critério independentemente.

(I) Se $\sqrt{\dfrac{|x-a|}{|x-b|}} < 1$ (FALSO !)

Contra-exemplo:

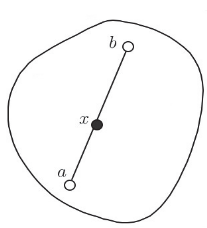
Basta tomar $a = -1$ e $b = 3$. Se $x = -2$, veja que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|x-a|}{|x-b|}} &= \sqrt{\frac{|-2-(-1)|}{|-2-3|}} \\ &= \sqrt{\frac{|-2+1|}{|-5|}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} < 1, \text{ mas } -2 \text{ não está entre } -1 \text{ e } 3 \end{aligned}$$



(II) Se $\dfrac{x-a}{x-b} \cdot \left(\dfrac{x-a}{x-b} - 1\right) < 0$ (VERDADEIRO !)

A ideia deste teste é utilizar a noção de conjunto convexo, parametrizando o segmento que une a até b e verificando se x está no segmento.



Se existe um λ real, com $\lambda > 0$ e $\lambda \in (0,1)$, tal que

$$x = \lambda \cdot b + (1-\lambda) \cdot a \Rightarrow a < x < b$$

Vamos resolver a equação $x = \lambda \cdot b + (1 - \lambda) \cdot a$ explicitamente para λ.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cdot b + (1 - \lambda) \cdot a \\ x &= \lambda \cdot b + a - \lambda \cdot a \\ x - a &= \lambda b - \lambda a \\ x - a &= \lambda(b - a) \Rightarrow \lambda = \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

Um fato matemático trivial que temos é que se $\lambda^2 - \lambda < 0 \Rightarrow \lambda \in (0, 1)$, e isto implica que $a < x < b$. Neste sentido, $\lambda^2 - \lambda < 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) < 0$.

Substituindo $\lambda = \dfrac{x - a}{b - a}$ na equação acima, nós temos que:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1) &< 0 \\ \frac{x - a}{b - a}\left(\frac{x - a}{b - a} - 1\right) &< 0 \Rightarrow a < x < b \end{aligned}$$

(III) $(x - a) \cdot (x - b) < 0$ VERDADEIRO!

Podemos interpretar as desigualdades $a < x < b$ como:

$$\underbrace{a < x}_{0 < x - a} \quad \text{e} \quad \underbrace{x < b}_{x - b < 0}$$

Ou seja,

$$x - a > 0 \quad \text{e} \quad x - b < 0$$

$$\text{se} \quad \underbrace{(x - a)}_{positivo} \cdot \underbrace{(x - b)}_{negativo} < 0 \Rightarrow a < x < b$$

(IV) $x < \frac{a+b}{2}$ FALSO!

Contra-exemplo:

Basta tomar $a = 2$ e $b = 4$.

Se $x = 0$, veja que

$$x < \frac{a + b}{2}$$

$$0 < \underbrace{\frac{2 + 4}{2}}_{3}, \quad \text{mas} \quad 0 \quad \text{não está entre} \quad 2 \quad \text{e} \quad 4$$

Questão 08

Letra: **A**

Considerando que a soma de cada linha deve ser igual a 1 (representando a totalidade dos consumidores atuais), obtemos:

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Analisando cada item:

- Item I – **FALSO**.

Para a matriz ser simétrica é necessário que a transposta da matriz seja igual a matriz original. Abaixo vemos que a transposta M^t é diferente de M.

$$M^t = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

- Item II – **VERDADEIRO**.

O maior elemento da diagonal está na terceira linha e terceira coluna (a_{33}), ou seja, a marca 3.

- Item III – **FALSO**.

A maior soma dos elementos por coluna é a soma da coluna 3, logo, a marca 3 é a que mais atrai compradores de outras marcas.

- Item IV – **VERDADEIRO**.

Veja que $a_{32} = 0{,}1 = 10\%$.

- Item V – **VERDADEIRO**.

Veja que $a_{13} = 0{,}2$ e $a_{23} = 0{,}4$, logo a probabilidade da marca 3 ter compradores provenientes da marca 1 ou da marca 2 é a soma dos dois valores, que totaliza $0{,}6 = 60\%$.

Então temos: $N_V = 3$ e $N_F = 2$. Logo,

$N_F - N_V = 2 - 3 = -1.$

Questão 09

Resposta: **50**

Vamos inicialmente trabalhar com o lucro.
Seja x a quantidade de picolés produzidas e vendidas no mês. Então, o custo mensal (c) será dado por:

$$c = Custo\ Fixo + Custo\ Produção\ de\ x\ Picolés$$

$$c = 7500 + 1{,}4x$$

A receita mensal (r) pela venda dos x picolés será:

$$r = 3{,}9x$$

O lucro (L) é dado por:

$$L = Receita - Custo$$

$$L = 3{,}9x - (7500 + 1{,}4x)$$

$$L = 3{,}9x - 7500 - 1{,}4x$$

$$L = 2{,}5x - 7500$$

Para não haver prejuízo no mês, e necessário:

$$L \geq 0$$

$$2{,}5x - 7500 \geq 0$$

$$2{,}5x \geq 7500$$

$$x \geq 3000$$

Para não haver prejuízo, a cooperativa tem que vender no mínimo 3000 picolés por mês, o que equivale a 100 picolés por dia (em média).

Agora vamos analisar o preço da passagem. Note que cada passageiro compra apenas 1 picolé (suposição do problema).
Foi dito que:
R$ 20,00 ------- 160 passagens
R$ 40,00 ------- 120 passagens

Construindo um modelo linear entre o preço p e a quantidade de passagens q, temos:

$$p = aq + b$$

Colocando os dados para encontrar a e b, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 20 = 160a + b \\ 40 = 120a + b \end{cases}$$

Subtraindo a linha 1 da linha 2, temos:

$$40 - 20 = 120a + b - 160a - b$$

$$20 = -40a$$

$$a = -0{,}5$$

Substituindo o valor de a na linha 1:

$$20 = 160 \times (-0{,}5) + b$$

$$20 = -80 + b$$

$$b = 100$$

Logo, a relação entre o preço da passagem e a quantidade de passageiros por dia é:

$$p = -0{,}5q + 100$$

Ou

$$0{,}5q = 100 - p$$

$$q = \frac{100 - p}{0{,}5}$$

$$q = \frac{100}{0{,}5} - \frac{p}{0{,}5}$$

$q = 200 - 2p$ (isolando q em função de p)

Para não haver prejuízo, a quantidade de picolés vendida por dia deve ser superior a 100. Teremos:

$$q \geq 100$$

$$200 - 2p \geq 100$$

$$-2p \geq 100 - 200$$

$$-2p \geq -100$$

$$2p \leq 100$$

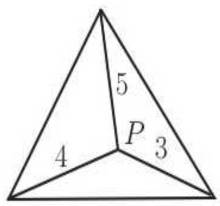
$$p \leq 50$$

Questão 10

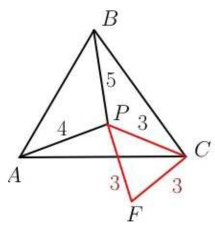
Resposta: Letra C

Solução:

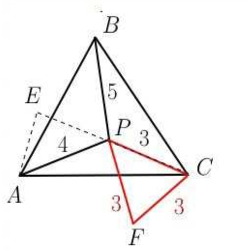
A situação do problema está representada pela figura abaixo:



Pode-se observar que $\bar{PC} = 3$, $\bar{PA} = 4$ e $\bar{PB} = 5$. Vamos construir um triângulo equilátero PCF, tal que P e F estão em lados opostos em relação ao segmento AC.



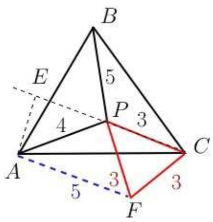
Desenhe um segmento $\bar{AE}$ perpendicular ao segmento estendido de $\bar{CP}$.



Com respeito a ângulos, observe que:

$$P\hat{C}B = 60° - P\hat{C}A = A\hat{C}F$$

Desta forma, os triângulos ΔPCB e ΔFCA são congruentes e $\bar{AF} = \bar{BP} = 5$.



Então o triângulo ΔAPF é um típico triângulo retângulo $3-4-5$, com $A\hat{P}F = 90°$. Neste sentido, teremos que:

$$A\hat{P}E = 180° - 60° - 90° \Rightarrow A\hat{P}E = 30°$$

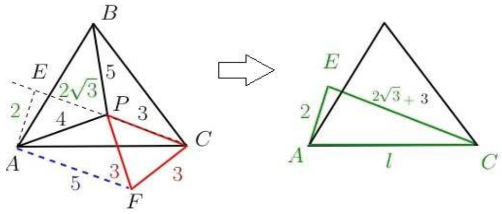
Aplicando uma trigonometria no triângulo retângulo ΔAPE, nós temos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{sen}(A\hat{P}E)} &= \frac{\bar{AE}}{4} \\ \underbrace{sen(30°)} &= \frac{\bar{AE}}{4} \\ \frac{1}{2} &= \frac{\bar{AE}}{4} \Rightarrow \bar{AE} = 2 \end{aligned}$$

Aplicando outra trigonometria no triângulo retângulo ΔAPE, nós temos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(A\hat{P}E)} &= \frac{\bar{EP}}{4} \\ \underbrace{cos(30°)} &= \frac{\bar{EP}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\bar{EP}}{4} \Rightarrow \bar{EP} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Pode-se observar que o triângulo ΔAEC é um triângulo retângulo. Aplicando o *Teorema de Pitágoras* ao triânguo ΔAEC, nós temos que:



$$
\begin{aligned}
(\bar{AC})^2 &= (\bar{EC})^2 + (\bar{AE})^2 \\
(\bar{AC})^2 &= (2\sqrt{3}+3)^2 + 2^2 \\
\bar{AC} &= \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2 + 2^2} = 6.76 \text{ cm}
\end{aligned}
$$